جامعة دمشق
المعهد العالي للبحوث والدراسات الزلزالية
ماجستير التأهيل والتخصص
قسم الهندسة الزلزالية

ديناميك المنشآت

Lec.07

الجمل متعددة درجات الحرية (MDOF)
(الاهتزاز الحر)

د.م. ريم الصحناوي

reemsalman_seh@hotmail.com

SUN 19/4/2020

التردد الطبيعي والأنماط الطبيعية للاهتزاز:

جملة غير متخامدة:

الاهتزاز الحر: هو حركة المنشأ بدون تأثير أي قوة ديناميكية (القوى الخارجية أو حركة مساند).

يتولد الاهتزاز الحر بإزاحة المنشأ عن وضع التوازن بانتقال ابتدائي و/ أو سرعة ابتدائية.

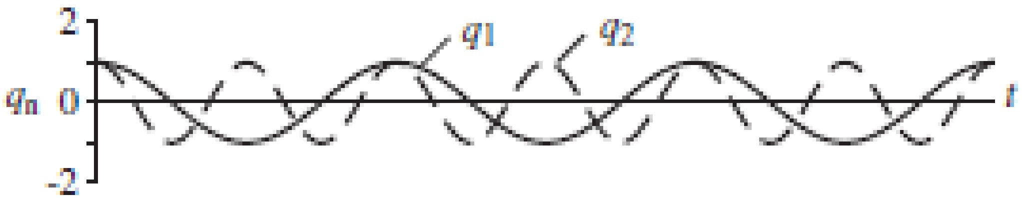
من أجل الجمل الغير متخامدة والمتعددة درجات الحرية، تتألف معادلة الحركة من N معادلة تفاضلية متجانسة:

$$m\ddot{u} + ku = 0$$

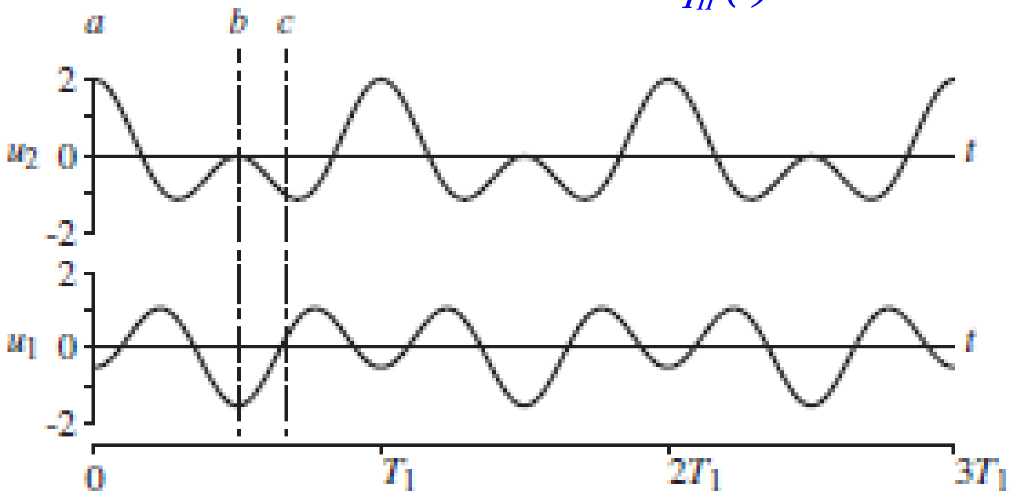
الشروط الابتدائية للحركة: $\dot{u} = \dot{u}(0)$ $u = u(0)$

التردد الطبيعي والأنماط الطبيعية للاهتزاز:

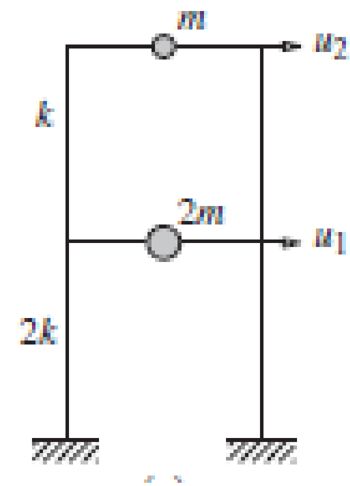
جملة غير متخامدة:



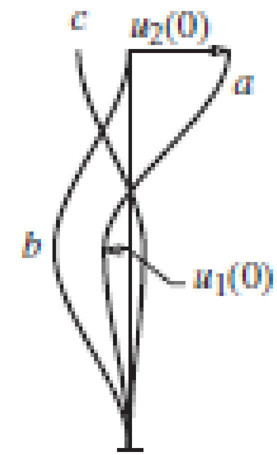
modal coordinates $q_n(t)$



displacement history



two-story frame



deflected shapes

الشروط الابتدائية للحركة:

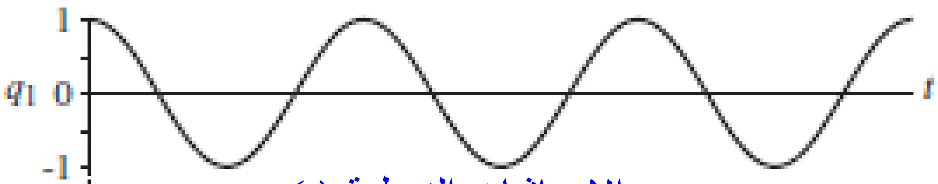
$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(0)\ ,\dot{\boldsymbol{u}} = \dot{\boldsymbol{u}}(0) = 0$$

- حركة الكتل ليست حركة هارمونية بسيطة ولا يمكن تعريف التردد الطبيعي للحركة.
- شكل التشوه متغير مع الزمن، نلاحظ من الشكل أشكال تشوه مختلفة b و c والتي هي مختلفة عن شكل التشوه الابتدائي a.

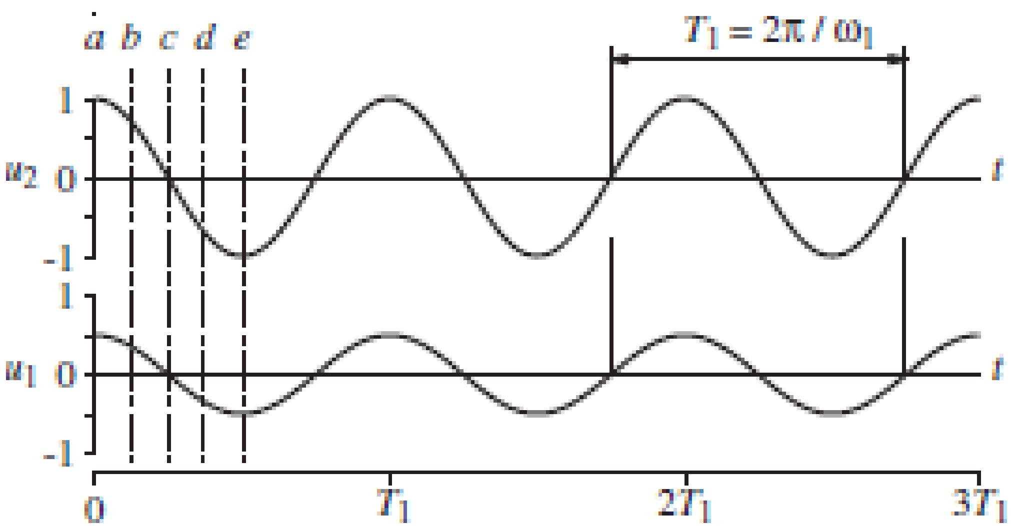
التردد الطبيعي والأنماط الطبيعية للاهتزاز:

جملة غير متخامدة:

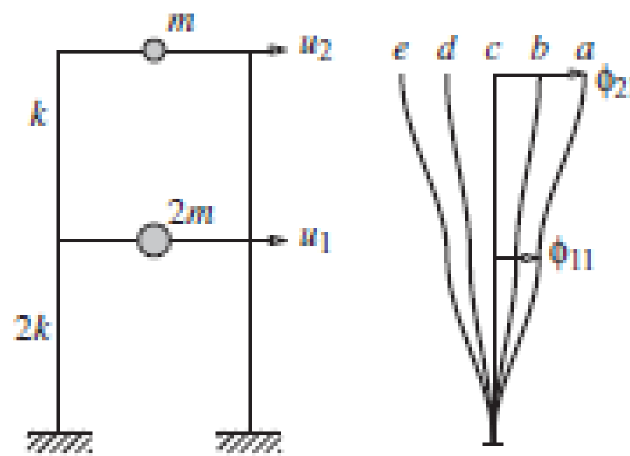
تهتز جملة غير متخامدة وفق حركة هارمونية بسيطة وبدون أي تغير في شكل الاهتزاز، في حال تم إثارة الاهتزاز الحر بتوزع مناسب للانتقالات في درجات الحرية المتختلفة.



$q_1\ (t)$ الاحداثيات النمطية



الاهتزاز الحر لجملة غير متخامدة وفق نمط الاهتزاز الطبيعي الأول



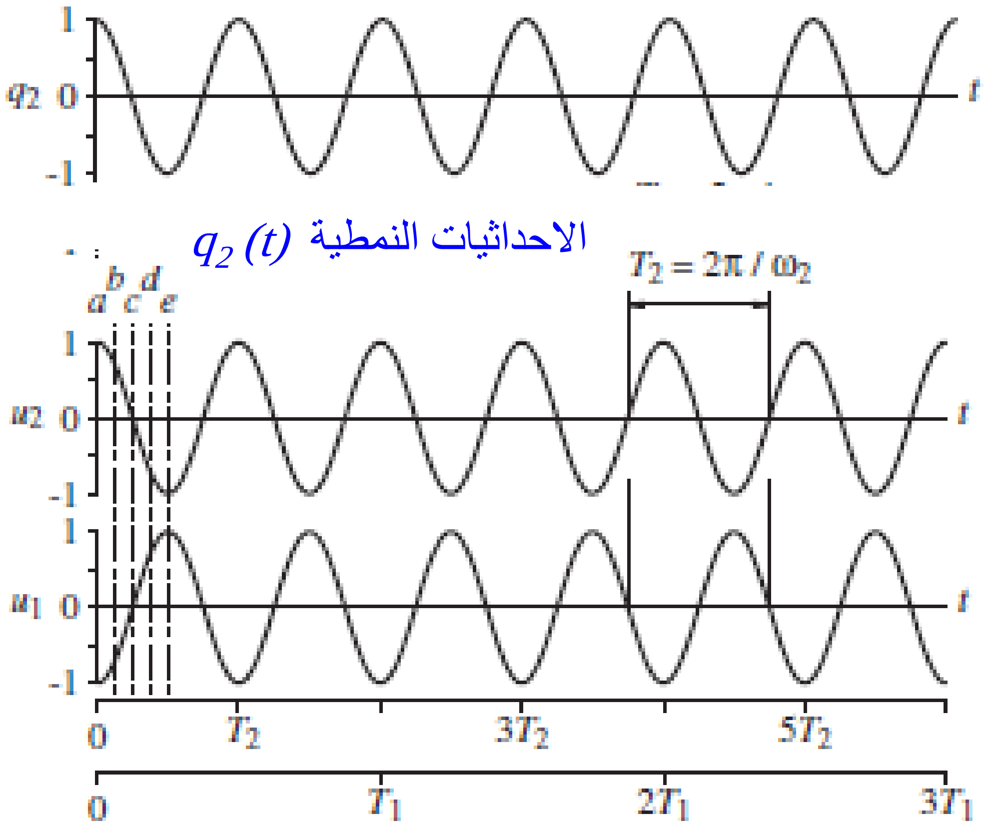
نمط الاهتزاز الطبيعي الأول

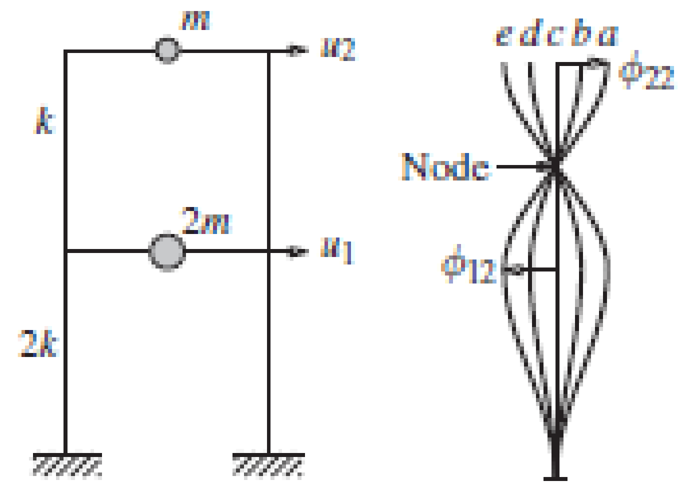
الانتقالات الحاصلة في الطابقين لها نفس الاتجاه في النمط الطبيعي الأول للاهتزاز.

التردد الطبيعي والأنماط الطبيعية للاهتزاز:

جملة غير متخامدة:

تهتز جملة غير متخامدة وفق حركة هارمونية بسيطة وبدون أي تغير في شكل الاهتزاز، في حال تم إثارة الاهتزاز الحر بتوزع مناسب للانتقالات في درجات الحرية المختلفة.





نمط الاهتزاز الطبيعي الثاني

الانتقالات الحاصلة في الطابقين في اتجاهين متعاكسين في النمط الطبيعي الثاني للاهتزاز. تسمى نقطة الانتقالات المعدومة بالعقدة، وهي لا تتحرك أبداً.

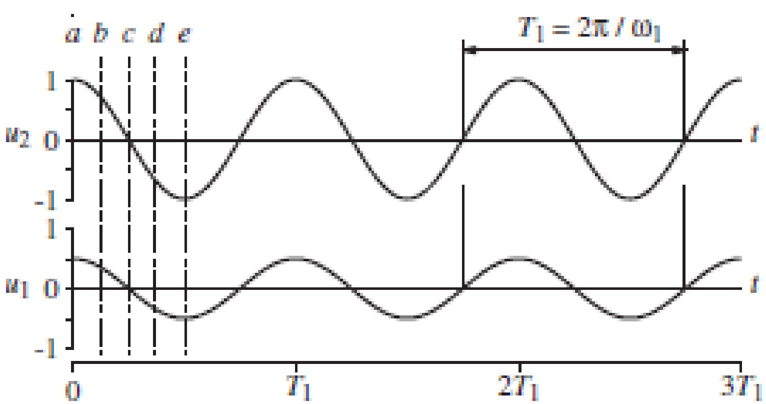
الاهتزاز الحر لجملة غير متخامدة وفق نمط الاهتزاز الطبيعي الثاني

التردد الطبيعي والأنماط الطبيعية للاهتزاز:

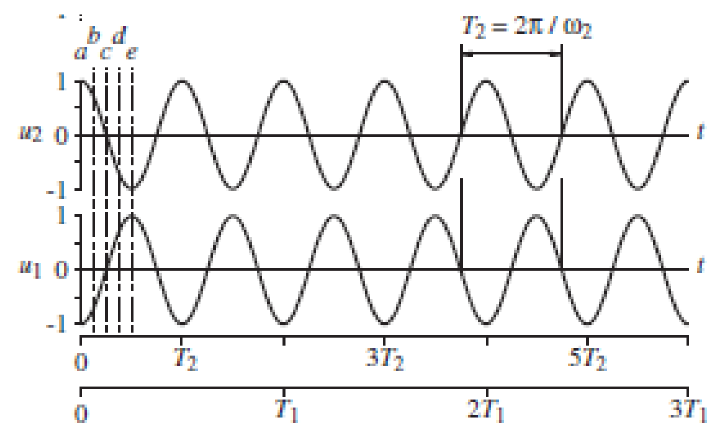
جملة غير متخامدة:

- في حال تم إزاحة الجملة التي تملك درجتي حرية وفق أحد هذه الأنماط ومن ثم تم تحريرها، سوف تهتز وفق حركة هارمونية بسيطة وفق نفس شكل التشوه الابتدائي.
- كل شكل تشوه يدعى النمط الطبيعي للاهتزاز لجملة متعددة درجات الحرية.
- الدور الطبيعي للاهتزاز $\mathbf{T_n}$ هو الزمن اللازم لدورة واحدة لحركة هارمونية بسيطة في نمط اهتزاز واحد من هذه الأنماط الطبيعية.
- التردد الطبيعي الموافق هو $\boldsymbol{\omega_n}$ والتواتر الطبيعي الموافق هو $\mathbf{f_n}$، حيث:

$$T_n = \frac{2\pi}{\omega_n} \qquad f_n = \frac{1}{T_n}$$



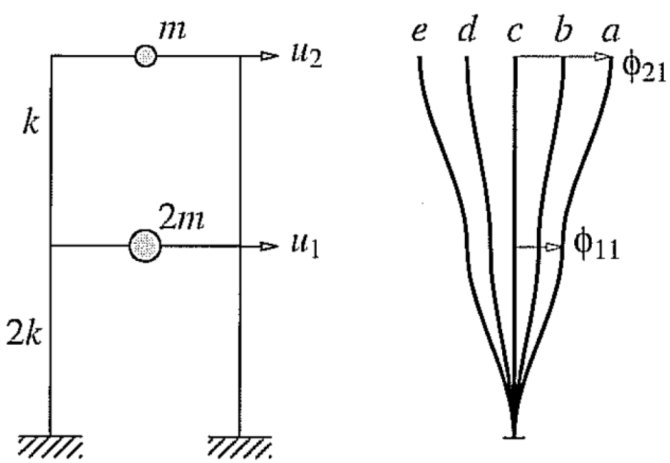
الاهتزاز الحر لجملة غير متخامدة وفق نمط الاهتزاز الطبيعي الأول



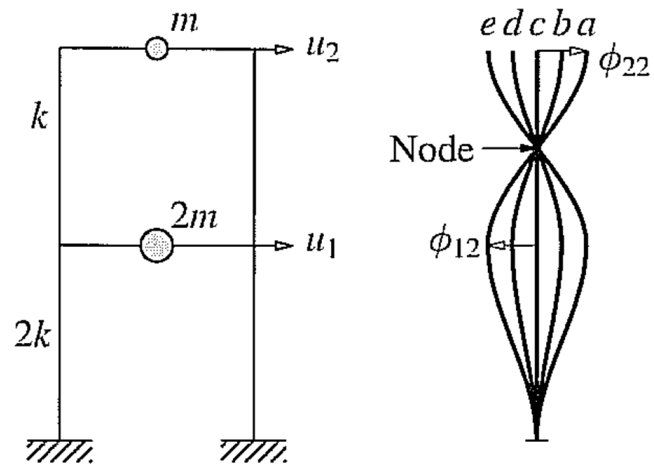
الاهتزاز الحر لجملة غير متخامدة وفق نمط الاهتزاز الطبيعي الثاني

التردد الطبيعي والأنماط الطبيعية للاهتزاز:

جملة غير متخامدة:



نمط الاهتزاز الطبيعي الأول



نمط الاهتزاز الطبيعي الثاني

$$\boldsymbol{\varphi}_1 = \begin{Bmatrix} \varphi_{11} \\ \varphi_{21} \end{Bmatrix} \qquad \boldsymbol{\varphi}_2 = \begin{Bmatrix} \varphi_{12} \\ \varphi_{22} \end{Bmatrix}$$

- الدوران الطبيعيان للاهتزاز T_n والترددان الطبيعيان الموافقان ω_n (n=1,2) للبناء المؤلف من طابقين يهتز وفق نمطي الاهتزاز $\varphi_n = (\varphi_{1n}\ \varphi_{2n})^T$.
- الترددان الطبيعيان للاهتزاز: $\omega_1 < \omega_2$
- الدوران الطبيعيان للاهتزاز: $T_1 > T_2$

التردد الطبيعي والأنماط الطبيعية للاهتزاز:

مسألة القيم الذاتية:

يعطي الحل الترددات الطبيعية والأنماط الطبيعية للجملة:

$$\mathbf{u}(t) = q_n(t)\phi_n$$

- لا يتغير شكل التشوه ϕ_n بتغير الزمن.
- يتم تعريف تغير الانتقالات بتغير الزمن من خلال تابع هارموني بسيط.

$$q_n(t) = A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t$$

- A_n و B_n ثوابت يمكن تحديدها من الشروط الابتدائية.

$$\mathbf{u}(t) = \phi_n \left(A_n \cos \omega_n t + B_n \sin \omega_n t\right)$$

ω_n و ϕ_n مجاهيل

التردد الطبيعي والأنماط الطبيعية للاهتزاز:

مسألة القيم الذاتية:

بتعويض $\mathbf{u}(t)$ و $\ddot{\mathbf{u}}(t)$ في المعادلة: $\boldsymbol{m\ddot{u} + ku = 0}$

ومنه:

$$\left[-\omega_n^2 \mathbf{m}\phi_n + \mathbf{k}\phi_n\right] q_n(t) = 0$$

إما $q_n(t) = 0$ وهذا يعني أن $u(t) = 0$ (ليس هنالك أي حركة في الجملة).

أو أن التردد الطبيعي ω_n والأنماط الطبيعية $\boldsymbol{\phi}_n$ يجب أن تحقق المعادلة التالية:

مسألة مصفوفة القيم الذاتية

$$\mathbf{k}\phi_n = \omega_n^2 \mathbf{m}\phi_n$$

$$\left[\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m}\right] \phi_n = 0$$

من هذه المعادلة نستطيع إيجاد القيم العددية ω^2 والشعاع $\boldsymbol{\phi}_n$.

ونحصل على N معادلة جبرية متجانسة من أجل N عنصر $\boldsymbol{\phi}_{jn}$ $(j = 1, 2, \ldots, N)$

التردد الطبيعي والأنماط الطبيعية للاهتزاز:

مسألة القيم الذاتية:

$$[\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m}] \phi_n = 0$$

يوجد حل لهذه المعادلة فقط إذا:

$$\det[\mathbf{k} - \omega_n^2 \mathbf{m}] = 0$$

معادلة التردد

يعطي الحل:

N تردد طبيعي للاهتزاز ω_n لجملة متعددة درجات الحرية لها N درجة حرية.

N شعاع مستقل ϕ_n والذي يعرف بالأنماط الطبيعية للاهتزاز.

- $(\omega_1 < \omega_2 < \ldots < \omega_N)$.
- $(T_1 > T_2 > \ldots > T_N)$.
- النمط الأول $(n=1)$ يعرف بالنمط الأساسي للاهتزاز.
- الخصائص الطبيعية للجملة تعتمد فقط على كتلته **m** و القساوة للجملة **K**.

تعامد الأنماط:

تحقق الأنماط الطبيعية الموافقة لترددات طبيعية مختلفة شروط التعامد التالية من أجل $\omega_n \neq \omega_r$.

$$\phi_n^T \mathbf{k} \phi_r = 0 \qquad \phi_n^T \mathbf{m} \phi_r = 0$$

تعامد الأنماط الطبيعية يدل على أن المصفوفات المربعة التالية هي مصفوفات قطرية:

$$\mathbf{K} \equiv \mathbf{\Phi}^T \mathbf{k} \mathbf{\Phi} \qquad \mathbf{M} \equiv \mathbf{\Phi}^T \mathbf{m} \mathbf{\Phi}$$

حيث العناصر القطرية هي:

$$K_n = \phi_n^T \mathbf{k} \phi_n \qquad M_n = \phi_n^T \mathbf{m} \phi_n \qquad K_n = \omega_n^2 M_n$$

تسوية الأنماط:

تحدد مسألة القيم الذاتية الأنماط الطبيعية فقط من أجل عوامل ضرب ما.

الشعاع φ_n هو نمط طبيعي، وأي شعاع منسوب ل φ_n هو نفس نمط الاهتزاز لأنه أيضاً يحقق مسألة القيم الذاتية.

يتم أحياناً تطبيق عامل قياس على الأنماط الطبيعية من أجل تقييس أشعة الأنماط المترافقة مع درجات الحرية المختلفة.

يتم تسوية الأنماط وفق إحدى الطرق التالية:

1- قيمة أكبر عنصر مساوية للواحد.

2- قيمة العنصر الموافق لدرجة حرية محددة مساوية للواحد.

3- قيمة الكتلة المعممة Mn للنمط n مساوية للواحد.

نشر أنماط الانتقالات:

يمكن استخدام أي مجموعة مؤلفة من N شعاع مستقل أبعادها N كأساس لتمثيل أي شعاع آخر بعده N.

بالتالي يمكن إجراء نشر نمطي لشعاع الانتقالات u على الشكل التالي:

$$\boxed{\mathbf{u} = \sum_{n=1}^{N} \boldsymbol{\varphi}_n q_n = \boldsymbol{\Phi}\mathbf{q}}$$

حيث q_n عوامل ضرب سلمية تدعى بالإحداثيات النمطية.

من أجل كل شعاع نمطي φ_n هنالك q_n مترافقة معطاة بالعلاقة التالية:

$$q_n = \frac{\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{m}\mathbf{u}}{\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{m}\boldsymbol{\varphi}_n} = \frac{\boldsymbol{\varphi}_n^T \mathbf{m}\mathbf{u}}{M_n}$$

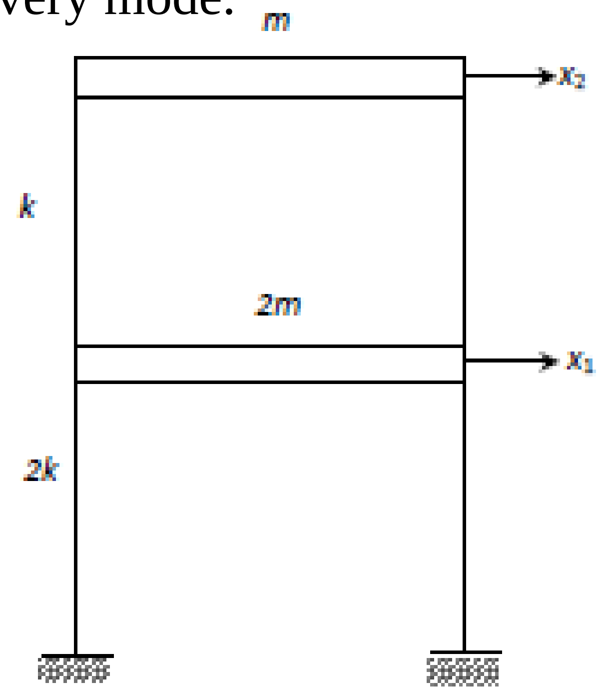
Example 1:

A two-story building is modeled as 2-DOF system and rigid floors as shown in the Figure below. Take the inter-story stiffness, $k = 200 \times 103\ N/m$ and the floor mass, $m = 2500\ kg$ and damping ratio as 5%.

1.Write the general matrix equation of lateral free vibration of the frame.

2.Find the natural frequencies of the frame.

3.Find the vibration modes, then draw a small sketch for every mode.



Solution:

The mass matrix of the structure, $\boldsymbol{m} = \begin{bmatrix} 2m & 0 \\ 0 & m \end{bmatrix} = 2500 \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

The stiffness matrix, $\boldsymbol{K} = \begin{bmatrix} 3k & -k \\ -k & k \end{bmatrix} = 200 \times 10^3 \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

Substituting in the equation of the eigenvalue (frequency equation):

$$det[\boldsymbol{k} - \omega_n^2 \boldsymbol{m}] = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{k} - \omega_n^2 \boldsymbol{m} = k \begin{bmatrix} 3 - 2\lambda & -1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} \quad : \quad \lambda = \frac{c_m}{c_k} \omega_n^2 \quad \rightarrow \quad \omega_n^2 = \frac{c_k}{c_m} \lambda$$

$$det[\boldsymbol{k} - \omega_n^2 \boldsymbol{m}] = \boldsymbol{0}$$

$$det \begin{bmatrix} 3 - 2\lambda & -1 \\ -1 & 1 - \lambda \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad 2\lambda^2 - 5\lambda + 2 = 0$$

$$\lambda_1 = 0.5 \rightarrow \omega_1^2 = \frac{k}{m} \lambda_1 = \frac{200 \times 10^3}{2500} \times 0.5 = 40 \rightarrow \omega_1 = 6.324 rad/sec$$

$$\lambda_2 = 2.0 \rightarrow \omega_2^2 = \frac{k}{m} \lambda_2 = \frac{200 \times 10^3}{2500} \times 2.0 = 160 \rightarrow \omega_2 = 12.65 rad/sec$$

Solution:

The natural modes are determined from the matrix eigenvalue problem:

$$[\boldsymbol{k} - \omega_n^2 \boldsymbol{m}]\boldsymbol{\emptyset_n} = \boldsymbol{0}$$

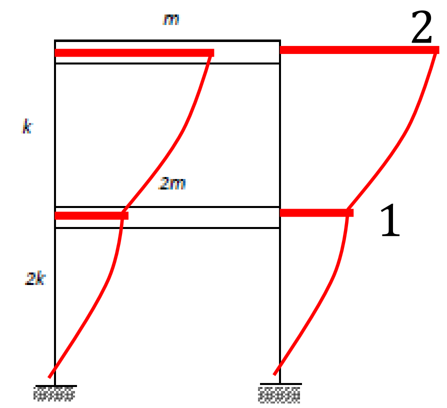
$$\begin{bmatrix} 3-2\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \emptyset_{1n} \\ \emptyset_{2n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \qquad (3-2\lambda)\emptyset_{1n} - \emptyset_{2n} = 0$$

For $n = 1$:

$$\lambda = \lambda_1 = 0.5 \quad \rightarrow \quad (3-2\lambda_1)\emptyset_{11} - \emptyset_{21} = 0$$

Assume: $\emptyset_{11} = 1$

$$\emptyset_{21} = (3-2\lambda_1)\emptyset_{11} = 2 \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \emptyset_{11} \\ \emptyset_{21} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 2 \end{Bmatrix}$$

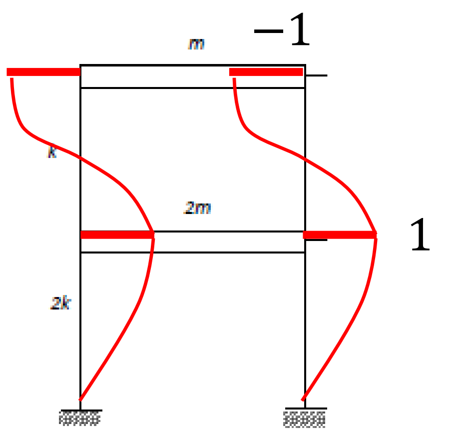


For $n = 2$:

$$\lambda = \lambda_2 = 2.0 \quad \rightarrow \quad (3-2\lambda_2)\emptyset_{12} - \emptyset_{22} = 0$$

Assume: $\emptyset_{12} = 1$

$$\rightarrow \quad \emptyset_{22} = (3-2\lambda_2)\emptyset_{12} = -1 \quad \rightarrow \quad \begin{Bmatrix} \emptyset_{12} \\ \emptyset_{22} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1 \end{Bmatrix}$$



Example 2:

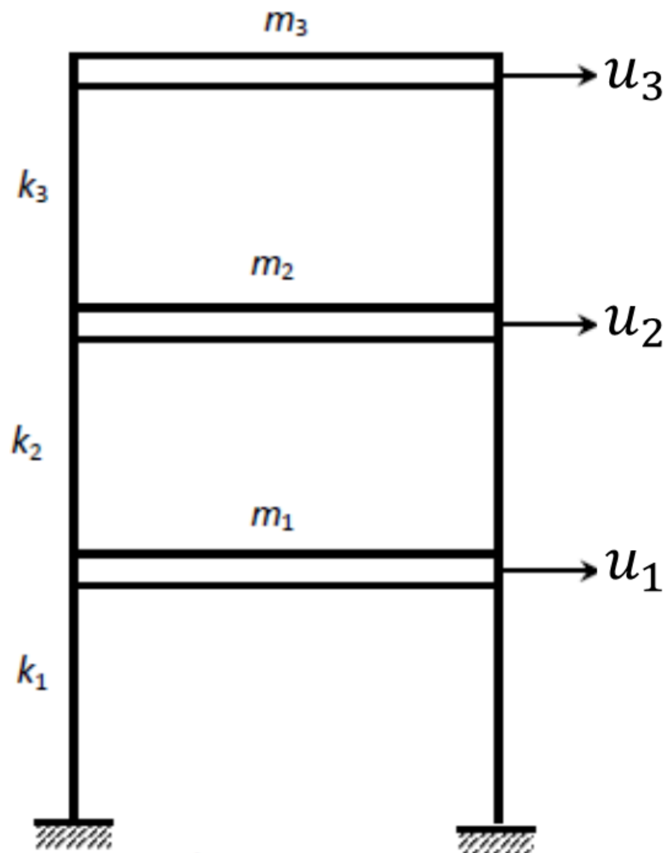
A three-story building is modeled as 3-DOF system and rigid floors as shown in the figure below. Take
the inter-story lateral stiffness of floors $k_1 = k_2 = k_3 = 15 \times 10^6\ N/m$
and the floor mass $m_1 = m_2 = 10000\ kg$ and $m_3 = 5000\ kg$.

1.Write the general matrix equation of lateral free vibration of the frame.

2.Find the natural frequencies of the frame.

3.Find the vibration modes,

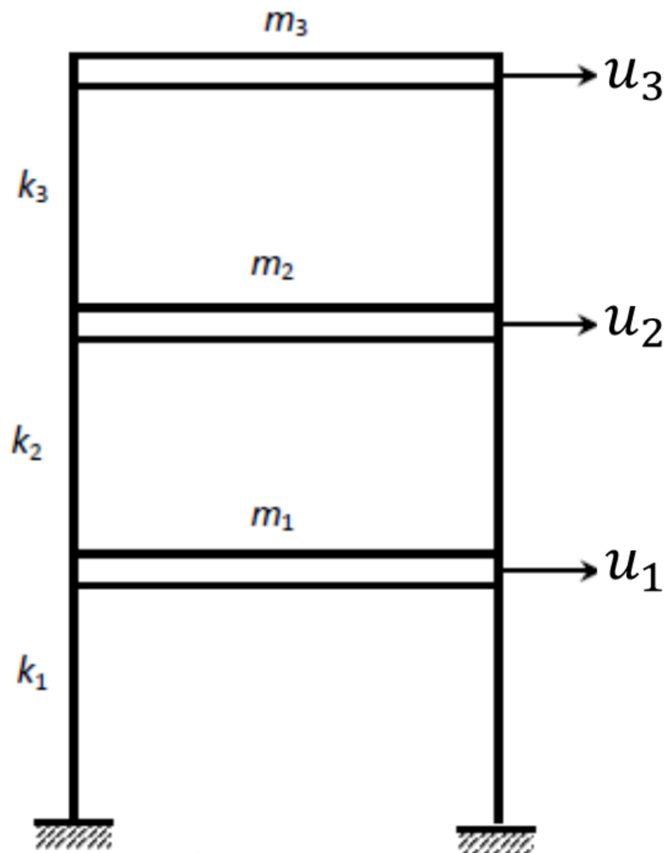
then draw a small sketch for every mode.



Solution:

The mass matrix of the structure,

$$[m] = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} = 5000 \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$



The stiffness matrix,

$$[k] = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{K} = 15 \times 10^6 \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Solution:

Substituting in the equation of the eigenvalue (frequency equation):

$$det[\boldsymbol{k} - \omega_n^2 \boldsymbol{m}] = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{k} - \omega_n^2 \boldsymbol{m} = 15 \times 10^6 \begin{bmatrix} 2-2\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-2\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} : \quad \lambda = \frac{c_m}{c_k}\omega_n^2 \quad \rightarrow \quad \omega_n^2 = \frac{c_k}{c_m}\lambda$$

$$det[\boldsymbol{k} - \omega_n^2 \boldsymbol{m}] = \boldsymbol{0}$$

$$det \begin{bmatrix} 2-2\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-2\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} = 0 \quad \rightarrow \quad (2-2\lambda)\left[(2-2\lambda)(1-\lambda)-1\right]+\left[-1+\lambda\right]=0$$

$$-4\lambda^3 + 12\lambda^2 - 9\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_1 = 0.134, \qquad \lambda_2 = 1\,, \qquad \lambda_3 = 1.866$$

Solution:

Substituting in the equation of the eigenvalue (frequency equation):

$$\lambda_1 = 0.134 \rightarrow \ \omega_1^2 = \frac{k}{m}\lambda_1 = \frac{15 \times 10^6}{5000} \times 0.134 = 402 \rightarrow \omega_1 = 20.05 rad/sec$$

$$\lambda_2 = 1.0 \rightarrow \ \omega_2^2 = \frac{k}{m}\lambda_2 = \frac{15 \times 10^6}{5000} \times 1.0 = 3000 \rightarrow \omega_2 = 54.77 rad/sec$$

$$\lambda_3 = 1.866 \rightarrow \ \omega_3^2 = \frac{k}{m}\lambda_3 = \frac{15 \times 10^6}{5000} \times 1.866 = 5598 \rightarrow \omega_2 = 74.82 rad/sec$$

The natural modes are determined from the matrix eigenvalue problem:

$$[\boldsymbol{k} - \omega_n^2 \boldsymbol{m}]\emptyset_{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{bmatrix} 2-2\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-2\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \emptyset_{1n} \\ \emptyset_{2n} \\ \emptyset_{3n} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} (2-2\lambda)\emptyset_{1n} - \emptyset_{2n} &= 0 \\ -1\emptyset_{1n} + (2-2\lambda)\emptyset_{2n} - \emptyset_{3n} &= 0 \\ -\emptyset_{2n} + (1-\lambda)\emptyset_{3n} &= 0 \end{aligned}$$

Solution:

***For Mode 1* (for n = 1):**

$$\begin{bmatrix} 2-2\times 0.134 & -1 & 0 \\ -1 & 2-2\times 0.134 & -1 \\ 0 & -1 & 1-0.134 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \\ \phi_{31} \end{bmatrix} = 0$$

Assuming $\Phi_{11} = 1$,

$$2-2\times 0.134 = \phi_{21}$$

$$\phi_{21} = 1.732 \text{ and } \phi_{31} = 2.0$$

$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.732 \\ 2.0 \end{Bmatrix}$$

Solution:

For Mode 2 **(for $n = 2$):**

$$\begin{bmatrix} 2-2 & -1 & 0 \\ -1 & 2-2 & -1 \\ 0 & -1 & 1-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \\ \phi_{32} \end{bmatrix} = 0$$

$$\{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix}$$

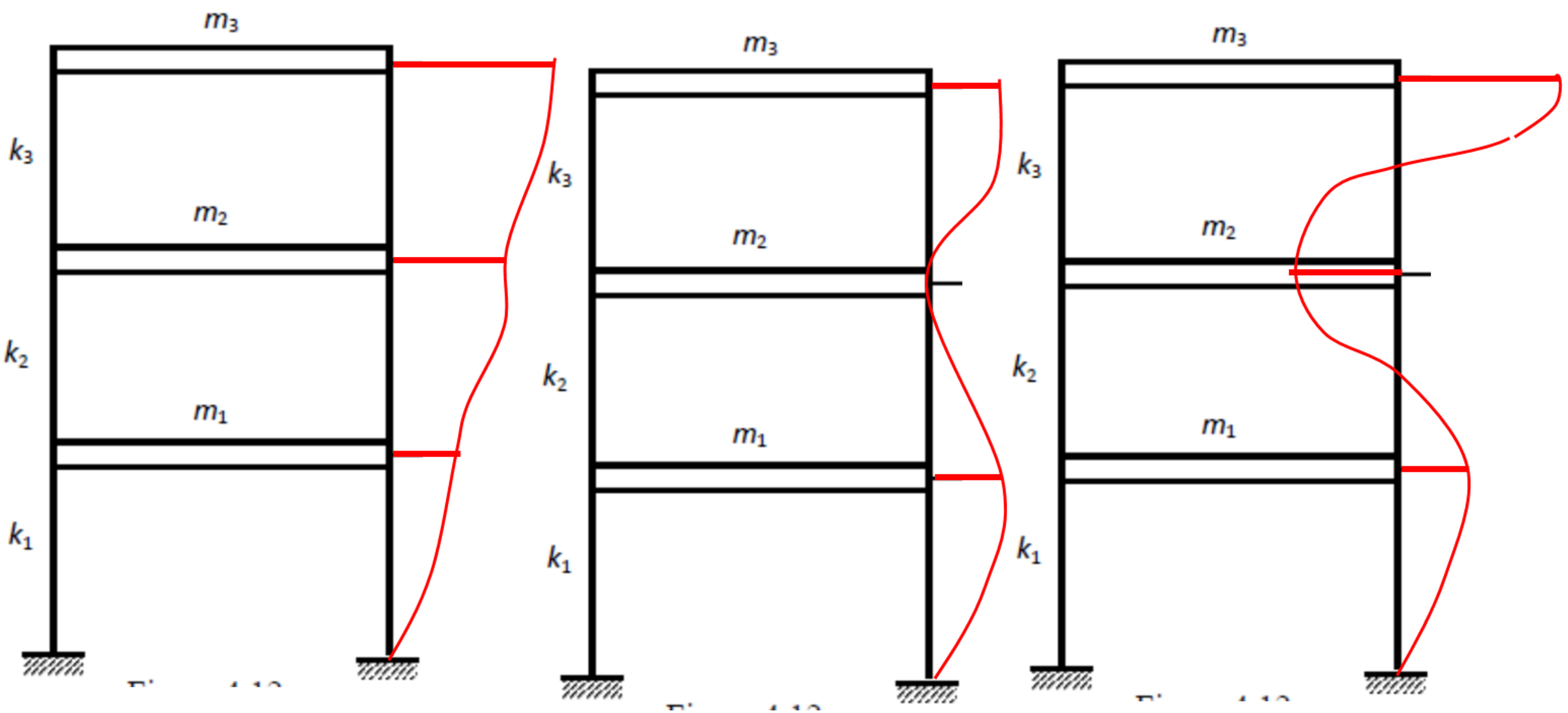
Solution:

For Mode 3 **(for n = 3):**

$$\begin{bmatrix} 2-2\times1.866 & -1 & 0 \\ -1 & 2-2\times1.866 & -1 \\ 0 & -1 & 1-1.866 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \phi_{13} \\ \phi_{23} \\ \phi_{33} \end{bmatrix} = 0$$

$$\{\phi_3\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.733 \\ 2.0 \end{Bmatrix}$$

Solution:



$$\{\phi_1\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 1.732 \\ 2.0 \end{Bmatrix} \qquad \{\phi_2\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \qquad \{\phi_3\} = \begin{Bmatrix} 1 \\ -1.733 \\ 2.0 \end{Bmatrix}$$